№3-дәріс

Кері матрица

Анықтама 6. A текше матрицасы қайтымды емес немесе ерекше матрица деп аталады, егер $\det A = 0$, кері жағдайда қайтымды немесе ерекше емес матрица деп аталады.

Теорема 1. Егер A - қайтымды матрица болса, онда A^{-1} матрицасы табылады және ол тек біреу ғана болып, төмендегі теңдік орындалады:
$A^{-1}A = AA^{-1} = E$, мұндағы E – бірлік матрица.

A^{-1} матрицасы кері матрица деп аталады және төмендегі формула бойынша есептелінеді

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

мұндағы A_{ik}, $i,k = \overline{1,n}$, - A матрицасынының элементтерінің алгебралық толықтауышы.

Мысал 6. A матрицасына кері матрицаны тап.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шешуі. $\det A = 2 \neq 0$ (4 мысалды қара) болғандықтан, A матрицасы қайтымды. Алгебралық толықтауыштарды табамыз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{21} = -4, \quad A_{22} = -1, \quad A_{23} = 5, \quad A_{31} = -10, \quad A_{32} = -3, \quad A_{33} = 11 .$$

Бұдан

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрицаның рангі

Анықтама 7. A матрицасының k-ші ретті миноры деп A матрицасының кез келген таңдап алынған k баған мен k жолдың элементтерінен құралған анықтауышты айтамыз.

Мысал 8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix}$ берілген.

Оның 2-ші ретті минорлары

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 4\\ 10 & 12\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{vmatrix}$$ және тағы басқалар.

3-ші ретті минорлары

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 7\\ 9 & 10 & 11\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 9 & 11 & 12\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ 10 & 11 & 12\end{vmatrix}.$$

Теорема 2. Егер k-шы ретті минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда k-дан жоғарғы ретті барлық минорлар нөлге тең болады.

Анықтама 8. Матрицаның ***рангі*** $r(A)$ деп нөлге тең емес минордың ең жоғарғы ретін айтамыз, ал кез келген $r(A)$-ші ретті нөлге тең емес минор ***базистік минор*** деп аталады.

Мысал 9. Матрицаларды көмкеру әдісі.

A матрицасында k-ші ретті $M_k \neq 0$ миноры табылды делік. Осы M_k минорын көмкеретін $k+1$-ші ретті минорларды қарастырамыз. Егер ол минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда $r(A)=k$. Егер M_k минорын көмкеретін $k+1$-ші ретті минорлардың ішінде тым болмағанда біреуі нөлге тең болмаса, онда осы нөлге тең емес минорды көмкеретін $k+2$-ші ретті минорларды қарастырамыз, т.с.с.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2-ші ретті нөлге тең емес минор

$$M_2=\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

белгілейік. Ендеше, $r(A)\geq 2$. Енді M_2-ні көмкеретін нөлге тең емес 3-ші ретті минорды іздейміз. Бұл минор

$$M_3=\begin{vmatrix}-4 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot A_{23}=-2\cdot\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Бұдан, $r(A)\geq 3$ екендігі шығады.

Берілген A матрицасының соңғы екі жолы тең болғандықтан, барлық 4-ші ретті минорлар нөлге тең болады. Дербес жағдайы, M_3 минорын көмкеретін минорлар нөлге тең. Ендеше, $r(A)=3$.

Е с к е р т у. Матрицаның рангі – осы матрицадағы сызықты тәуелсіз жолдардың (бағандардың) санына тең. 20 мысалда бұл сөйлемнің мағынасын былай түсінуге болады: A матрицасының 1,2,3 жолдары сызықты тәуелсіз, ал A матрицасының қалған жолдары (4 жол) 1,2,3 жолдардың сызықтық комбинациясы бойынша өрнектеледі.